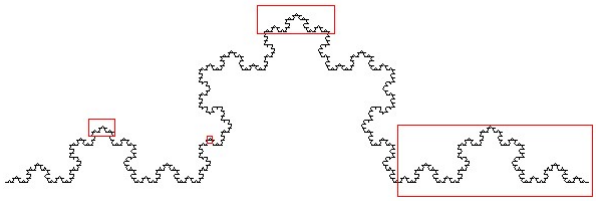
ITIS-LS "Francesco Giordani" Caserta

prof. Ennio Ranucci

a.s. 2019-2020

Il principio di induzione e la ricorsione



Principio di induzione matematica

Il principio di induzione matematica dice che per dimostrare che tutti i numeri naturali godono della proprietà P `e sufficiente dimostrare due cose, che:

1. il numero 0 gode di P (base dell'induzione);

2. per ogni n, se n gode di P, anche n + 1 ne gode, (passo dell'induzione).

Il passo dell'induzione spesso si dimostra attraverso le seguenti tre mosse:
(a) si considera un generico k;
(b) si assume che la proprietà P valga per k, (ipotesi di induzione);
(c) si dimostra che la proprietà P vale per k + 1.

Induzione matematica

Dimostrare che p(n) è vero per ogni naturale n

- *Passo base: p(0)*
- *Passo induttivo: p(k) → p(k+1) per ogni k*

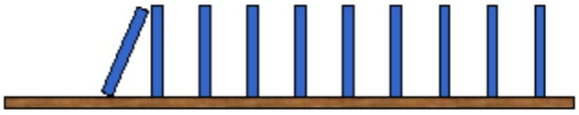
Ipotesi induttiva: assunzione che p(k) è vera

Esempio 1

Supponiamo di aver una scala infinita e di voler saper se possiamo raggiungere ogni piolo della scala.

Sappiamo:
1) possiamo raggiungere il primo piolo;
2) se possiamo raggiungere un particolare piolo della scala allora possiamo raggiungere il successivo;
Possiamo concludere che possiamo raggiungere ogni piolo

Esempio 2



Sequenza infinita di libri

- *il primo cade*
- *il primo fa cadere il secondo*
- *il secondo fa cadere il terzo*
- *… Come faccio a dimostrare che cadono tutti?*

Col principio di induzione posso farlo, sapendo che "il primo cade"
se cade l'n-esimo, allora cade l'(n+1)-esimo

La ricorsione

La ricorsione è un metodo per definire funzioni in modo tale che la funzione includa sé stessa nella propria definizione.

Si tratta di una tecnica di programmazione che consente di suddividere il problema da risolvere in sottoproblemi analoghi all'originale ma più semplici, perché agenti su dati di ingresso ridotti.

Un algoritmo ricorsivo è definito in due fasi:

- *dapprima si definisce la risoluzione di un problema simile a quello di partenza ma di dimensione ridotta (passo base);*
- *quindi si definisce il passo di risoluzione generale come combinazione di problemi di dimensione inferiore*

Nella definizione induttiva di una funzione è possibile identificare:

- *un caso base (o più di uno) detto tappo induttivo perchè è la terminazione della chiamata ricorsiva*
- *un caso induttivo (o più di uno)*

La ricorsione consiste nella possibilità di definire una funzione in termini di se stessa.
È basata sul principio di induzione matematica:
se una proprietà P vale per $n=n_0$ (Caso base)
e si può provare che, assumendola valida per n, allora vale per n+1 allora P vale per ogni $n>=n_0$

Operativamente, risolvere un problema con un approccio ricorsivo comporta:

1. *identificare un "caso base" la cui soluzione sia nota*
2. *riuscire a esprimere la soluzione al caso generico n in termini dello stesso problema in uno o più casi più semplici*

La ricorsione

Quando una funzione ricorsiva invoca se stessa, l'esecutore esegue le stesse azioni che vengono eseguite quando viene invocato una funzione qualsiasi:

1. sospende l'esecuzione della funzione invocante
2. esegue la funzione invocata fino alla sua terminazione
3. riprende l'esecuzione della funzione invocante dal punto in cui era stata sospesa.

L'utilizzo della tecnica della ricorsione viene utilizzata in tutti quei casi in cui non è conveniente o non è possibile utilizzare i cicli iterativi.

```
Function FattorialeRicorsivo(N As Integer) As Integer
    If N = 1 Then Return 1                          (tappo induttivo)
    Return N * FattorialeRicorsivo(N - 1)           (passo induttivo o ricorsivo)
 End Function
```

In generale la ricorsione è molto dispendiosa dal punto di vista dell'occupazione della memoria quando le chiamate a quella funzione sono di grandi dimensioni. Per risolvere questo problema si può utilizzare la funzione iterativa piuttosto di quella ricorsiva, tanto che è stato dimostrato che ogni funzione ricorsiva può essere scritta come funzione iterativa.

```
int potenza(int base, int esp)
{
    if (esp>0) return base*potenza(base,esp-1);
    else return 1;
}
```

traccia dell'esecuzione nel caso che base=2 ed esp=3

potenza(2,3)->2*potenza(2,2)->2*2*potenza(2,1)->2*2*2*potenza(2,0)->2*2*2*1